

XIV Conferencia Latinoamericana de Informática
17avas. Jornadas Argentinas de Informática
e Investigación Operativa
Buenos Aires, Setiembre 1988.

OPTIMIZACION DE SISTEMAS DINAMICOS VIA PERTUBACION
SINGULAR DE LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Laura Aragone

PROMAR- Instituto de Matemática Beppo Levi

Avenida Pellegrini 250

(T.E: 217998-TELEX: 41817 CIRODSAR)

Universidad Nacional Rosario

(2000) Rosario - Argentina

Resumen: En este trabajo se presenta una metodología especial para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a la función de costo óptimo de problemas de control de sistemas determinísticos en el caso estacionario. La misma consiste en utilizar una perturbación singular del operador diferencial interviniente en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y esquemas de discretización especiales para el gradiente de la función de costo óptimo, basados en el método de las diferencias finitas.

Estos esquemas satisfacen un Principio de Máxima Discreto, lo que implica la estabilidad y convergencia del método, así como la posibilidad de utilizar algoritmos iterativos para resolver el problema discretizado.

I-Introducción

Se considera en este trabajo un problema de control óptimo de sistemas dinámicos descriptos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Se estudia el caso estacionario, realizando discretizaciones orientadas a preservar para el problema aproximado, las características de linealidad en los controles del problema original; de esta forma las optimizaciones puntuales que aparecen en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) resultan ser programaciones lineales, que al estar definidas sobre restricciones de tipo hipercubos pueden ser solucionadas directamente por inspección de los coeficientes que multiplican a los controles. El sistema tratado tiene una evolución dinámica descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t)) \quad (1)$$

$$x(0) = x_0$$

siendo

$$f(x, y) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) u_i$$

donde $x_0 \in \Omega$, el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y se supone que para todo $t \geq 0$ el estado del sistema $x(t) \in \Omega$ (la trayectoria del sistema no sale nunca de Ω)

Las políticas de control:

$$y(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow Y$$

siendo

$$Y = [u_{1,\min}, u_{1,\max}] \dots [u_{m,\min}, u_{m,\max}]$$

son funciones medibles y se supone que:

$f_i(x)$ es una función continua y acotada de $x \in \Omega$ y que además se satisface:

$$\|f_i(x) - f_i(\tilde{x})\| \leq C_{f_i} \|x - \tilde{x}\| \quad (2)$$

$$\forall x, \tilde{x} \in \Omega$$

Bajo estas condiciones se demuestra (para cualquier control $y(\cdot)$ arbitrario) la existencia y unicidad de la solución de (1) [5].

A este sistema dinámico se le asocia el funcional de costo $J(x_0, y(\cdot))$. Si $y(\cdot)$ es una

política arbitraria de control, J toma la forma:

$$J(x_0, y(\cdot)) = \int_0^{\infty} (l_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m l_i(x(t)) y_i(t)) e^{-\alpha t} dt \quad (3)$$

El objetivo del problema es encontrar la política de control $\bar{y}(\cdot)$ que minimiza el funcional J , es decir tal que

$$J(x_0, \bar{y}(\cdot)) = \inf_{y(\cdot)} J(x_0, y(\cdot))$$

Los coeficientes $l_i(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que intervienen en la función de costo instantáneo

$$l(x, y) = l_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m l_i(x(t)) y_i(t)$$

son funciones continuas, acotadas y satisfacen:

$$\|l_i(x) - l_i(\tilde{x})\| \leq C_1 \|x - \tilde{x}\| \quad (4)$$

para una constante $C_1 > 0$, $x, \tilde{x} \in \Omega$

α es el coeficiente de actualización y se supone

$$\alpha > \sum_{i=1}^m C_{f_i} \max(|y_{i,\min}|, |y_{i,\max}|)$$

II-Definición de la función de costo óptimo

La función de costo óptimo se define

$$V(x_0) = \inf_{y(\cdot)} J(x_0, y(\cdot)) \quad (5)$$

(ver [5] pág 9).

Bajo las condiciones dadas para f y l (ver [5] pág. 38) se demuestra la existencia de la función costo óptimo y la lipschitzianidad de la misma. Mas aún, debido a la forma especial (lineal en y) de la dinámica (1) y del costo J , existe una política óptima ya que:

- J es continuo en la topología $*$ -débil de $L^{\infty}((0, \infty); \mathbb{R}^m)$
- el conjunto de las políticas admisibles es compacto bajo esta topología en virtud de la convexidad de Y [7].

Asimismo se prueba que V verifica la ecuación de H-J-B asociada:

$$\min_{y \in Y} LV = 0$$

(6)

siendo

$$LV = \nabla V f + 1 - \alpha V \geq 0$$

V es llamada la función de costo óptimo y en base a su conocimiento pueden determinarse las políticas óptimas de control buscadas, por lo que la solución del problema original se reduce esencialmente al cálculo de esta función V .

Para encontrar numéricamente la solución V de (6), se resuelve esta ecuación de H-J-B en forma aproximada por discretización, hallando una función V^h que converge hacia V cuando h (parámetro de discretización) tiende a cero.

III-Perturbación singular de la ecuación de H-J-B

Con vistas a obtener esquemas de discretización convenientes se procede a considerar una perturbación singular del operador diferencial interviniente en (6).

La ecuación perturbada tomará la forma:

$$\min_{y \in Y} L_{\sigma}(V^{\sigma}) = 0$$

(7)

donde

$$L_{\sigma}(V^{\sigma}) = A_{\sigma} V^{\sigma} + \nabla V^{\sigma} f + 1 - \alpha V^{\sigma}$$

con

$$A_{\sigma} = \sum_{k=1}^n \sigma_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

Este operador resulta de analizar, en lugar del sistema determinístico asociado a la ecuación (1), el sistema con perturbaciones aleatorias descrito por la ecuación estocástica de Itô.

$$dx = f(t) dt + \sum_{k=1}^n \sqrt{2\sigma_k} dw_k$$

(8)

donde los w_k son movimientos brownianos unidimensionales independientes [6].

Se considera que la difusión descrita por (8) se comporta como una difusión.

reflejada en la frontera de Ω ; en consecuencia la ecuación (7) tendrá como condición de frontera natural la siguiente restricción

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k \frac{\partial V^\sigma}{\partial x_k} n_k = 0 \quad (9)$$

n_k componente k-ésima del vector normal a $\partial\Omega$
se tiene así que

$$V^\sigma \in W = \left\{ w \in W^{2,\infty} / \text{verifica (9)} \right\}$$

Puede probarse que cuando $\sigma \rightarrow 0$ $V^\sigma \rightarrow V$ por lo que en los siguientes párrafos será desarrollada una metodología para aproximar V^σ .

La ecuación perturbada de H-J-B puede ser obtenida también directamente aplicando la teoría de perturbaciones por regularización de ecuaciones e inequaciones variacionales (ver [11]), sin necesidad de recurrir a interpretaciones probabilísticas de las mismas.

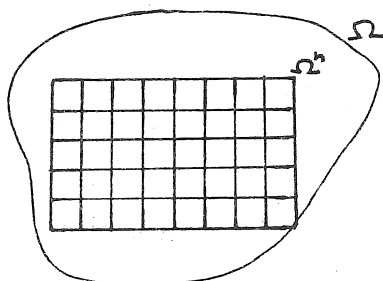
Asimismo, los esquemas obtenidos a través de la perturbación estocástica del sistema pueden ser logrados también como caso límite (pasando al caso estacionario) de los esquemas obtenidos para problemas determinísticos evolutivos en el trabajo [9].

IV-Formulación del problema discretizado

a) Discretización de Ω :

El conjunto Ω es reemplazado por un cubrimiento Ω^h formado por nodos $x_p^h = x_p$ (ver figura 1) que determinan un enrejado uniforme.

$h = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2 \}$, es llamada la norma de la partición.



b) Discretización del conjunto de controles Y:

El conjunto Y es reemplazado por el conjunto aproximado $Y^h = I_1^h \dots I_n^h$ siendo

$$I_j^h = \left\{ \xi_j^k / \xi_j^k = u_{j,\min} + (u_{j,\max} - u_{j,\min}) \frac{k}{n_j}, \quad k = 0, 1, \dots, n_j \right\}$$

c) Discretización de W:

Las funciones de W son reemplazadas por funciones w^h definidas en los nodos del enrejado Ω^h

d) Discretización de las condiciones de frontera de la ecuación (7).

La condición de frontera $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ se discretiza en forma natural: (para el caso de Ω rectángulo)

$$w^h(0, x_2^h) = w^h(\Delta x_1, x_2^h) \quad \forall x_2^h$$

$$w^h(L_1, x_2^h) = w^h(L_1 - \Delta x_1, x_2^h) \quad \forall x_2^h$$

$$w^h(x_1^h, 0) = w^h(x_1^h, \Delta x_2) \quad \forall x_1^h$$

$$w^h(x_1^h, L_2) = w^h(x_1^h, L_2 - \Delta x_2) \quad \forall x_1^h$$

y en forma similar para el caso general

La ecuación (7) se discretiza de la siguiente forma

$$\min_{w \in Y^h} L_0^h \bar{w}^h = 0 \quad (10)$$

$$L_0^h w^h = A_0^h w^h + \nabla^h w^h \cdot f + 1 - \alpha w^h$$

donde las discretizaciones Δ^h y ∇^h del laplaciano y del gradiente están definidas respectivamente por:

$$A_0^h w^h = \sum_{k=1}^n \sigma_k \frac{w^h(x + e_k \Delta x_k) + w^h(x - e_k \Delta x_k) - 2w^h(x)}{(\Delta x_k)^2}$$

$$\nabla w^h \cdot f = \nabla w^h \cdot f_0 + \sum_{i=1}^m \nabla w^h \cdot f_i u_i$$

$$\nabla^h w^h f_i = \sum_{k=1}^n \frac{w^h(x+e_k \Delta x_k) - w^h(x-e_k \Delta x_k)}{2 \Delta x_k} f_{ik}(x)$$

donde

$$f_i = (f_{i1}, \dots, f_{in}) \quad i=0,1,\dots,m$$

y

$$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

es el k-ésimo versor unitario.

Esta forma de discretizar el operador L_0 permite reescribir la ecuación (10) en la forma equivalente:

$$\bar{V}^h = P_h \bar{V}^h$$

siendo:

$$\begin{aligned} P_h w^h(x_1, x_2) = & \frac{1}{\left(2 \sum_{k=1}^n \sigma_k (\Delta x_k)^{-2} + \alpha\right)} \left\{ \sum_{k=1}^n \sigma_k \frac{w^h(x+e_k \Delta x_k) + w^h(x-e_k \Delta x_k)}{(\Delta x_k)^2} + \right. \\ & + \sum_{k=0}^n \frac{w^h(x+e_k \Delta x_k) - w^h(x-e_k \Delta x_k)}{2 \Delta x_k} f_{0k}(x) + l_0(x) + \\ & \left. + \min_{y \in V^h} \left(\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{w^h(x+e_k \Delta x_k) - w^h(x-e_k \Delta x_k)}{2 \Delta x_k} f_{ik}(x) + l_k(x) \right\} y_k \right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Cuando

$$\sigma_k \geq \left(\|f_{0k}\| + \sum_{i=1}^m \|f_{ik}\| \right) \frac{\Delta x_k}{2} \quad (12)$$

se puede demostrar fácilmente que L_0^h verifica un principio de máximo discreto (ver [8]) y que en consecuencia el operador P_h es contractivo. Por lo tanto existe un único punto fijo $\bar{V}^h$ del operador P_h , que es la única solución de la ecuación discretizada (10).

V) Caracterización de la solución del problema discretizado

Podemos entonces (bajo la condición (12)) aplicar el teorema del punto fijo [9] y obtenemos:

Existe un único punto fijo $\bar{V}^h$ del operador P_h que es la única solución del sistema (10).

Queda así caracterizada la solución del problema discretizado y al mismo tiempo el

operador P_h permite definir un algoritmo para calcular $\bar{V}^h$.

VI Solución del problema discretizado

La demostración del teorema del punto fijo nos sugiere el siguiente algoritmo para computar $\bar{V}^h$.

ALGORITMO

Paso 0 : Tomar $V_0 \in W^h$, hacer $\nu=0$

Paso 1 : Hacer $V_{\nu+1} = P_h V_\nu$

Paso 2 : Si es $V_\nu = V_{\nu+1}$ ir a 3, sino, hacer $\nu=\nu+1$ e ir a 1.

Paso 3 : Hacer $\bar{V}^h = V_\nu$ y parar.

Este algoritmo termina en un número finito de pasos o genera una sucesión de elementos V_ν que converge a $\bar{V}^h$, verificándose la siguiente desigualdad:

$$\|V_\nu - \bar{V}^h\| \leq (\tilde{\beta})^\nu \|V_0 - \bar{V}^h\|, \quad \tilde{\beta} < 1$$

VII Convergencia de las soluciones aproximadas

La solución $\bar{V}^h$ del problema discretizado converge uniformemente hacia la función V (costo óptimo), solución de (6).

En efecto por deformación de dominio, utilizando las técnicas de regularización y discretización empleadas en [8] se obtiene que $\bar{V}^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} V$. Pudiéndose demostrar además que

$$\|\bar{V}^h - V\| \leq C\sqrt{h}$$

Los detalles completos de estos resultados están contenidos en [2].

VIII Ejemplo de aplicación

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$x(0) = x_0 \in \Omega$$

Ecuación dinámica del sistema

$$f_{0k} = 0 \quad k=1,2$$

$$f_{ik} = -\beta_i \operatorname{sat} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0.5}{\lambda} \right) \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad k=1,2 \quad i=1,2$$

$$u_i(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$$

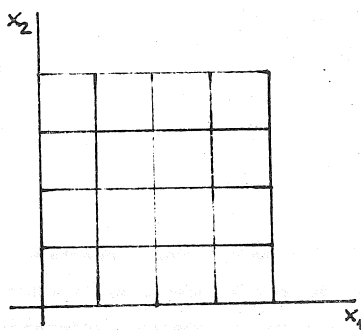
$$i=1,2$$

Costo instantáneo:

$$l_0(t) = \gamma (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0.5)^2$$

$$l_i = c_i y_i$$

Gráfico de discretización de Ω :



Analíticamente se obtiene que las políticas de control pueden calcularse exactamente en función de los valores de γ , α , β_1 , β_2 , c_1 y c_2 , resultando los controles óptimos constantes en las siguientes zonas

$$y_1=0 \text{ si } |\rho - 0.5| < \omega_1$$

$$y_2=0 \text{ si } |\rho - 0.5| < \omega_2$$

$$y_1=1 \text{ si } |\rho - 0.5| \geq \omega_1$$

$$y_2=1 \text{ si } |\rho - 0.5| \geq \omega_2$$

donde

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\omega_1 = \frac{c_1 \alpha}{2\beta_1 \gamma}, \quad \omega_2 = \frac{c_2 \alpha}{2\beta_2 \gamma} + \frac{\beta_1}{\alpha}$$

En las siguientes gráficas se muestran algunos resultados numéricos obtenidos con esta metodología, dando las zonas de aplicación ($y=1$, $z=1$) de los controles óptimos y la correspondiente evolución del sistema bajo estas estrategias.

Las constantes empleadas son:

$$\lambda = 0.01$$

$$c_1 = 0.03$$

$$c_2 = 0.045$$

$$\beta_1 = 0.05$$

$$\beta_2 = 0.05$$

$$\alpha = 10$$

$$\gamma = 20$$

Gráficas 1 a 4.

Conclusiones

En este trabajo se ha logrado una extensión de la metodología presentada en [8] al caso de control óptimo continuo. Lo esencial del procedimiento es la introducción de una perturbación singular que permite discretizar el operador diferencial L en la forma indicada en (11). Esta forma especial de discretización implica que el operador P_h puede escribirse en forma tal que la operación de búsqueda puntual de mínimo en la ecuación (10) resulta una programación lineal sobre un hipercubo por lo que este último problema puede ser solucionado directamente por inspección de los coeficientes que multiplican (en (6)) a los controles y_i .

Pueden darse sin ninguna dificultad condiciones suficientes sobre los coeficientes de perturbación para que sea válida la característica de contracción de P_h .

En base a esta propiedad se obtiene no sólo que el problema discretizado tiene solución única, sino también la estructura iterativa del algoritmo de cómputo y su convergencia. El procedimiento tiene la propiedad de convergencia uniforme de las aproximaciones y los ejemplos numéricos (testeados sobre un problema con solución exacta conocida) muestran la factibilidad y eficiencia del mismo.

Referencias

- [1] Aragone, L. S. & González, R. L. & Tidball, M. M. "Teoría de Juegos Diferenciales con Controles Monótonos". Aceptado para ser presentado en el Séptimo Congreso Brasileiro de Automática. 15- 19 Agosto 1988 São José Dos Campos- Brasil
- [2] Aragone, L. S. & González, R. L. & Tidball, M. M. "Solución numérica de Juegos Diferenciales" Rapport de Recherche INRIA. En preparación.
- [3] Barron, E. N. & Jensen, R. (1984) "A nonlinear evolution system with two subdifferentials and monotone differential games", Journal of Differential Equations. Vol 97 N° 1.
- [4] Ciarlet, P.G. & Raviart, P.A. "Maximum principle and uniform convergence for the finite element method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2 (1973), 17-31
- [5] Friedman, A. (1971). "Differential Games", Wiley- Interscience, New York.
- [6] Friedman, A. (1975). "Stochastic Differential Equations and Applications", Vol. 1, Academic Press, New York. Vol 2, 1976.
- [7] Ekeland, I & Teman, R. (1974) " Analyse convexe et problèmes variationnels" , Dunod, Paris.
- [8] González, R. L. & Rofman, E. (1985) "On deterministic control problem: an aproximation procedure for the optimal cost", Parts I and II, SIAM J. Control and Opt., 23, 2 (1985) 242-266 and 267-285.
- [9] González, R. L. & Rofman, E. "Computational methods in scheduling optimization", Fermat Days 85: Mathematics for Optimization 135-155
- [10] Protter, M. H. (1977) "A first course in real analysis", Springer Verlag, New York.
- [11] Lions, J.L. & Stampacchia, G. (1967) "Variational inequalities" , Comm. Pure Applied Math., 20, 493-519.

[illegible]

- 1064 -

CONTROL Y2

Grafico II

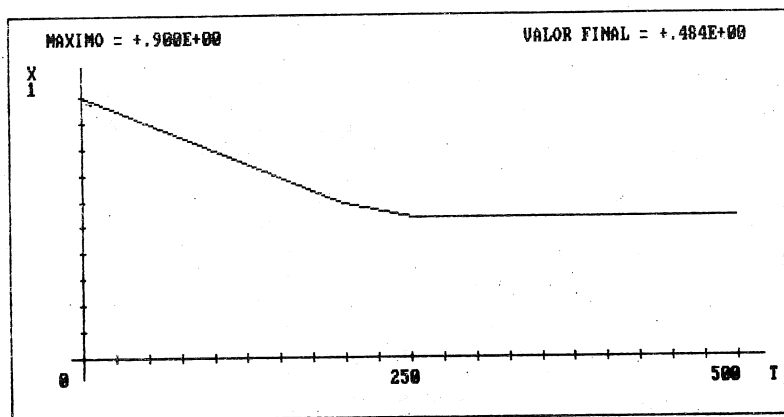


Gráfico III

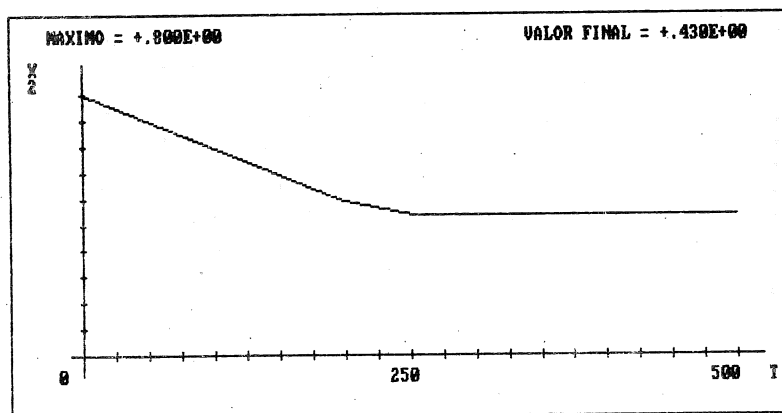


Gráfico IV